Préliminaires : ENSET 82

25 janvier 2019

1 Pour la partie III

Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$ une matrice nilpotente de rang $n-1$, d'endomorphisme associé f dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$.
a) Montrer que, pour tout entier naturel i, $\dim\mathrm{Ker}(f^{i+1}) \leq \dim\mathrm{Ker}(f^i) + 1$. On pourra regarder la restriction de f à $\mathrm{Im}(f^i)$.
b) Que dire si $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathrm{Ker}(f^{i+1})$?
c) Montrer que $f^{n-1} \neq 0$ et en déduire que A est semblable à la matrice N dont tous les termes sont nuls sauf ceux de la surdiagonale qui valent 1.

E.N.S.E.T. Section A1 (programme M') 1982

MATHEMATIQUES II (4 h)

On note $M_n(\mathbb{C})$ l'algèbre sur $\mathbb{C}$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients complexes. On rappelle que deux matrices A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$ et que l'on définit ainsi une relation d'équivalence dans $M_n(\mathbb{C})$. Enfin pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ on identifie la matrice A et l'endomorphisme $X \longmapsto AX$ de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ rapporté à sa base canonique (les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ étant notés en colonne).

PREMIERE PARTIE

On adopte les notations suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\Delta_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} \\ \mu & 0 \end{pmatrix}, \quad D_\mu = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{C}^*, \qquad \Omega = \{ A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A^2 = I \}$$

1° Donner le nombre des classes d'équivalence de matrices semblables contenues dans Ω. Préciser un représentant pour chaque classe.

2° Quelle classe d'équivalence particulière contenue dans Ω peut être caractérisée, parmi toutes les classes de $M_2(\mathbb{C})$, par la donnée du déterminant et de la trace? Donner toutes les matrices de cette classe.

3° On désigne par Σ l'ensemble des matrices inversibles de $M_2(\mathbb{C})$ semblables à leur inverse. Donner un représentant pour chaque classe de matrices semblables contenue dans Σ. Caractériser les matrices de Σ par leur trace et leur déterminant.

4° Trouver B et C dans la classe de S telles que $J_1 = BC$.

Donner tous les couples $(B, C) \in \Omega \times \Omega$ tels que $BC = J_1$. (S)...

On note Ω^2 l'ensemble des produits BC lorsque B et C parcourent Ω. Comparer Ω^2 et Σ (on pourra calculer le produit $\Delta_b \Delta_c$, $b, c \in \mathbb{C}^*$).

DEUXIEME PARTIE

On désigne par A, B et C trois éléments de $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$A = BC, \quad B^2 = C^2 = I,$$

où I est à partir de maintenant la matrice unité de $M_n(\mathbb{C})$.

1° Montrer que A est inversible et que son inverse A^{-1} est semblable à A.

2° Montrer que si $V \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre pour A il en est de même de BV et CV.

3° Montrer que si 1 est valeur propre de A et si le sous-espace propre associé est de dimension 1 alors les trois matrices A, B et C ont une direction propre commune.

4° On suppose que

$$A = J_{n,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & 1 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e_1, e_2

$u(e_1) = e_2$

$u(e_2) = \alpha e_1 - e_2$

c'est-à-dire $A = (a_{ij})$ avec $a_{ii} = a_{j,j+1} = 1$ pour $i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., n-1$, tous les autres coefficients de A étant nuls.

a. Montrer que B et C ont une seule direction propre commune que l'on précisera.

b. Montrer que B et C sont semblables. Préciser suivant la parité de n la dimension des sous-espaces propres de B et C en indiquant dans quel sous-espace est la direction propre commune.

c. Donner un couple (B, C) pour $n = 3, 4, 5$.

d. Montrer l'existence d'un tel couple pour tout n.

TROISIEME PARTIE

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible semblable à son inverse.

1° Montrer que si A admet une et une seule valeur propre et si le sous-espace propre associé est de dimension 1 alors il existe B et C dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que $A = BC$, $B^2 = C^2 = I$.

2° On suppose que A admet deux valeurs propres distinctes λ et μ et deux seulement, que λ n'est égale ni à 1 ni à -1 et que le sous-espace propre associé à λ est de dimension 1.

a. Exprimer μ en fonction de λ.

b. Comparer les dimensions des sous-espaces caractéristiques W_λ et W_μ associés respectivement à λ et μ. Qu'en déduit-on sur la parité de n ?

c. En considérant les restrictions aux sous-espaces caractéristiques de l'endomorphisme $X \longmapsto AX$ de $\mathbb{C}^n$ établir que A est semblable à une matrice qui s'exprime simplement en fonction de λ et $J_{k,1}$ pour un entier k à préciser en fonction de n.

d. En s'inspirant du calcul proposé dans le 4° de la première partie montrer qu'il existe B et C dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que $A = BC$, $B^2 = C^2 = I$.

FIN

ENSET 1982, Math. II - Corrigé : produits de réflexions

Auteur : Robert Cabane 19 rue de Lyon 33000 BORDEAUX, ou : `rcabane@online.fr`

Partie I : Etude des produits de réflexions planes

1°) Ω est l'ensemble des matrices de réflexion de taille 2×2. Ces matrices sont diagonalisables et de valeurs propres 1 ou -1. Il y a trois classes de similitude, celle de I, celle de $-I$, et celle de S ; les deux premières sont réduites à un seul élément car toute matrice semblable à une matrice scalaire est elle-même scalaire. ♦

2°) Une matrice M de déterminant -1 et de trace nulle a un polynôme caractéristique égal à $X^2 - 1$; le théorème de Cayley-Hamilton, dans ce cas élémentaire, assure que l'on a $M^2 = I$, donc que M est dans Ω. Sa trace étant nulle, elle n'est pas scalaire, donc il s'agit d'une matrice de la classe de S. Nous pouvons donc représenter cette classe sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $-a^2 - bc = 1$. Nous y trouvons toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} i & b \\ 0 & -i \end{pmatrix}$,leurs transposées, et enfin toutes les $\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{1+a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$.

3°) Notons d'abord que si $A = PA^{-1}P^{-1}$ alors $A' = QAQ^{-1} = (QPQ^{-1})(QA^{-1}Q^{-1})(QP^{-1}Q^{-1}) = P'A'^{-1}P'^{-1}$, de sorte que la classe de similitude de A est formée de matrices semblables à leur inverse. Discutons maintenant selon les valeurs propres de A.

a) On peut avoir $A = I$, avec $\operatorname{tr} A = 2$ et $\det A = 1$.

b) On peut aussi avoir $A = -I$, avec $\operatorname{tr} A = -2$ et $\det A = 1$.

c) Une autre possibilité est fournie par les valeurs propres 1 et -1 ; A est alors semblable à S : $\operatorname{tr} A = 0$ et $\det A = -1$.

d) Un autre cas est celui où A admet pour valeurs propres μ et $\frac{1}{\mu}$, μ étant différent de $1, -1$; A est alors élément de la classe de D_μ. Il vient $\operatorname{tr} A = \mu + \frac{1}{\mu}$ (nombre complexe quelconque) et $\det A = 1$.

e) Le dernier cas nous est fourni avec A non diagonalisable, donc avec une valeur propre double qui doit valoir 1 ou -1. En prenant une base de la forme (e_1, e_2), e_1 étant vecteur propre de A, on trouve une matrice semblable de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$. Dans la base (ae_1, e_2) il vient une matrice semblable à A de la forme J_1 ou J_{-1}. Ces matrices conviennent ($J_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ semblable à J_1).

f) Réciproquement, supposons que l'on ait $\det A = 1$; si A est diagonalisable on parvient à l'une des solutions envisagées en 3°a, 3°b, 3°d et sinon A est semblable à J_1 ou J_{-1}, qui toutes conviennent. De même, si $\det A = -1$ et $\operatorname{tr} A = 0$ on a deux valeurs propres 1 et -1, et A convient. ♦

4°) J_1 **est dans** Ω^2 **:**

Il suffit de poser $B = S$ et de calculer $C = BJ_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; on vérifie directement que $C^2 = I$.

En général, pour avoir une décomposition de la forme $J_1 = BC$ avec B, C dans Ω, on ne peut pas prendre $B = \pm I$ ni $C = \pm I$, car J_1 n'est pas diagonalisable tandis que B et C le sont. Il faut donc prendre B et C dans la classe de S. Or, J_1 doit envoyer e_1 sur lui-même.

Premier cas : Si $Ce_1 = e_1$, alors $Be_1 = e_1$; les valeurs propres de B et C sont $1, -1$, donc on a $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; en faisant le produit $BC = J_1$ on trouve $c - b = 1$, soit $C = \begin{pmatrix} 1 & b+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Second cas : Si $Ce_1 = -e_1$, alors $Be_1 = -e_1$ donc $B = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; le produit $BC = J_1$ donne $c - b = -1$, donc $C = \begin{pmatrix} -1 & b-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Troisième cas : Si e_1 n'est pas un vecteur propre de C, on a $e_1' = Ce_1$ et (e_1, e_1') est une base de $\mathbb{C}^2$. Comme C est une réflexion, on a $Ce_1' = e_1$. Mais B doit ramener e_1' sur e_1, et on a pour la même raison $Be_1 = e_1'$. Du coup, il vient $B = C$ ce qui ne mène pas au résultat voulu. ♦

Comparaison de Ω^2 et Σ : Soient d'abord B, C appartenant à Ω. On a $(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1} = CB = C(BC)C^{-1}$, donc BC est semblable à son inverse ; c'est-à-dire que $\Omega^2 \subset \Sigma$.

Pour la réciproque on commence par le

Lemme. *Si B et C appartiennent à Ω et U est inversible alors $UBCU^{-1}$ appartient à Ω^2 : toute matrice semblable à un produit de réflexions est elle-même un produit de réflexions.*

Preuve:$UBCU^{-1} = UBU^{-1}UCU^{-1} = B_1C_1$ et on a encore $B_1^2 = C_1^2 = I$. ♦

Ce lemme montre qu'il suffit de vérifier que $I, -I, S, J_1$ et les D_μ sont dans Ω^2. Pour les quatre premières matrices c'est immédiat ou accompli. En ce qui concerne D_μ, on constate que $\Delta_a\Delta_b = D_{b/a}$, tandis que $\Delta_a^2 = D_1 = I$. ♦

Les matrices 2×2 semblables à leurs inverses sont exactement les produits de deux réflexions.

Partie II : Un bloc de Jordan comme produit de deux rélexions

1°) A est inversible comme produit de deux matrices inversibles. Elle est semblable à son inverse (preuve au I4°). ♦

2°) $AV = \lambda V \Rightarrow A^{-1}V = \frac{1}{\lambda}V \Rightarrow CBV = \frac{1}{\lambda}V \Rightarrow BCBV = \frac{1}{\lambda}BV$ et aussi en prémultipliant par B : $CV = \lambda BV$, donc BV et CV sont vecteurs propres de A pour la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$. ♦

3°) Si $A = I$ on n'insiste pas. Sinon, A ayant la valeur propre 1 avec un espace propre de dimension 1, BV est nécessairement lié à V puisque $\lambda = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1$. De plus, les valeurs propres de B et C ne peuvent valoir que 1 ou -1. En fin de compte, on a soit $AV = BV = CV = V$ soit $AV = V = -BV = -CV$. ♦

4°) **Cas du bloc de Jordan.**

a) La question II3° s'applique ici ; ainsi, B et C ont e_1 comme vecteur propre car c'est la seule direction du noyau de $A - I_2$ (l'écrire).

Inversement, si W est un vecteur propre commun de B et C, il est vecteur propre de A et c'est e_1. ♦

b) Nous pouvons supposer que le vecteur e_1 est propre pour B et C avec la valeur propre 1, car sinon on se ramène à ce cas en changeant B en $-B$ et C en $-C$.

Soit E_1 l'espace propre de la valeur propre 1 pour B et F_1 celui qui correspond pour C ; de même, E_{-1} et F_{-1}. Nous avons ainsi $E_1 \cap F_1 = \text{Vect}(e_1)$, $E_1 \cap F_{-1} = \{0\} = F_1 \cap E_{-1} = E_{-1} \cap F_{-1}$, ce qui impose d'après la formule de Grassmann que $\dim E_1 + \dim F_{-1} \leqslant n$, soit $\dim E_1 \leqslant n - \dim F_{-1} = \dim F_1$. Par symétrie on a $\dim E_1 = \dim F_1$ et aussitôt $\dim E_{-1} = \dim F_{-1}$. Les matrices B et C étant diagonalisables, avec les mêmes valeurs propres et des espaces propres de mêmes dimensions, sont bien semblables.

On a aussi $\dim(E_1 + F_1) = \dim E_1 + \dim F_1 - 1 = 2\dim E_1 - 1 \leqslant n$, soit $\dim E_1 \leqslant \frac{n+1}{2}$, tandis que $\dim(E_{-1} + F_{-1}) = \dim E_{-1} + \dim F_{-1} = 2\dim E_{-1} \leqslant n$, soit $\dim E_{-1} \leqslant \frac{n}{2}$. Le total de ces deux dimensions doit donner n, donc

- si $n = 2p$: $\dim E_1 = \dim F_1 = \dim E_{-1} = \dim F_{-1} = p$
- si $n = 2p+1$: $\dim E_1 = \dim F_1 = p+1$ et $\dim E_{-1} = \dim F_{-1} = p$.

c) On peut noter que la structure de B et C est quasiment fixée par blocs. La première colonne est obligatoirement $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour B et C. En transposant tout et en appliquant à nouveau l'argument du vecteur invariant, on voit que la dernière ligne de B et C est $(0, 0, \varepsilon)$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

Cas $n = 3$. Ainsi, B et C sont triangulaires supérieures avec une diagonale faite de 1 et -1. Du coup, on peut écrire en blocs : $B = \begin{pmatrix} B' & V \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} C' & W \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$. Le produit par blocs amène $B'^2 = C'^2 = I_2$ et $B'C' = J_1$, situation qui a été traitée au I4°. En particulier, B' et C' doivent avoir la valeur propre -1, ce qui oblige ε à valoir 1. On peut aussi « lire » les blocs en isolant la première colonne au lieu de la dernière ; la même analyse est possible. Compte-tenu de l'ensemble de ces observations, la structure des matrices B et C est donc la suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b & u \\ 0 & -1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & b+1 & w \\ 0 & -1 & v-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} (\alpha) & 2u + bv = 0 \\ (\beta) & 2w + (b+1)(v-1) = 0 \\ (\gamma) & u + w + b(v-1) = 0 \end{cases}$$

mais $(\alpha) + (\beta) - 2(\gamma)$ donne $v - 1 + b = 0$. Parmi les solutions il y en a deux qui sont très simples, obtenues avec $b = 0$, $v = 1$, $u = 0$, $w = 0$ ou $b = 1$, $v = 0$, $u = 0$, $w = 1$, et une autre assez simple avec $b = -1$, $v = 2$, $u = 1$, $w = 0$. De plus, on peut changer le signe de B et C. Ce qui nous donne ces quelques solutions :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cas $n = 4$. On s'inspire des remarques antérieures : on peut « lire » dans une éventuelle solution de taille 4 des solutions en taille 3 tant à partir du « coin nord-ouest » qu'à partir du « coin sud-est ». D'autre part, on sait qu'ici B et C ont chacune 1 et -1 comme valeur propre double. On commence donc par mettre dans le coin nord-ouest la première des solutions précédentes, ce qui oblige à écrire la dernière dans le coin sud-est. Le coefficient restant est arbitraire, on peut le choisir nul. Soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cas $n = 5$. On recommence avec la méthode de superposition. Il vient :
$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&-1&1&-1&1\\0&0&1&-2&3\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&0&1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$
d) Il est clair, d'après les exemples précédents, qu'un mécanisme de parité est à l'œuvre en combinaison avec des coefficients du binôme. Modélisons l'espace $\mathbb{C}^n$ comme $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. L'endomorphisme associé à $A = A_n$ peut se comprendre comme $\mathrm{id}+\Phi$, avec $\Phi(X^k) = X^{k-1}$, ou en général $\Phi(P) = \frac{P-P(0)}{X}$. L'endomorphisme associé à $B = \begin{pmatrix}1&-1&1&-1&\dots\\0&-1&2&-3&\dots\\0&0&1&-3&\dots\\0&0&0&-1&\dots\\0&\dots&\dots&0&\ddots\end{pmatrix}$ est simple, c'est $P \mapsto P(-X-1)$. Quant à l'endomorphisme associé à C_n, il est obtenu comme $C_n = B_n \circ (\mathrm{id}+\Phi)$; en effet, $B_n \circ (\mathrm{id}+\Phi)(X^k) = B_n(X^k + X^{k-1}) = (-X-1)^k + (-X-1)^{k-1} = (-1)^{k-1}X(X+1)^{k-1}$ ce qui correspond bien à la matrice $C_n = \begin{pmatrix}1&0&0&0&\dots\\0&-1&+1&-1&\dots\\0&0&+1&-2&\dots\\0&0&0&-1&\dots\\0&\dots&\dots&0&\ddots\end{pmatrix}$. On vérifie sans peine que $B_n^2 = I$ et il en résulte que $B_nC_n = B_n^2 \circ (\mathrm{id}+\Phi) = \mathrm{id}+\Phi = A$. Enfin, le calcul de C_n^2 est facile si on travaille par blocs, restreignant C_n au sous-espace formé des polynômes P tels que $P(0) = 0$: la matrice de cette restriction est l'opposée de B_{n-1}, donc de carré l'identité. C'est ainsi que

$$\boxed{\text{le problème de décomposition de } J_{n,1} \text{ en produit de deux réflexions a toujours une solution.}}$$

Partie III

1°) Cas où A a une seule valeur propre.
Si A admet une et une seule valeur propre, associée à un espace propre de dimension 1, cette valeur propre doit être égale à son inverse, donc à 1 ou -1. On peut se ramener au cas de la valeur propre 1 quitte à changer A en $-A$ (et B en $-B$). A ce compte, $N = A - I$ est nilpotente, de rang $n-1$. On vérifie que les rangs des N^k décroissent strictement (si $\operatorname{rg} N^k = \operatorname{rg} N^{k+1}$ alors $\operatorname{Im} N^k = \operatorname{Im} N^{k+1}$ et N ne parvient plus à être nilpotente à moins que $\operatorname{Im} N^k = \{0\}$), ce qui amène $N^{n-1} \neq 0$. On prend e_1 dans $\operatorname{Im} N^{n-1}$, $e_1 = N^{n-1}(e_n)$ et $e_k = N^{n-k}(e_n)$; il ne reste plsu qu'à vérifier que ces vecteurs forment une base, ce qui est aisé. On en déduit que la matrice de A est semblable à $J_{n,1}$. On a vu à la question II4°d que l'on peut écrire $J_{n,1} = BC$; la similitude donne (lemme ci-dessus) une décomposition $A = B_1C_1$ avec $B_1^2 = C_1^2 = I$. ♦

2°) Cas où A a deux valeurs propres.
a) Nous avons les valeurs propres de A et A^{-1} qui doivent être les mêmes, donc $\mu = \frac{1}{\lambda}$ puisque $\lambda \neq \frac{1}{\lambda}$. De plus, les espaces propres de A et A^{-1} ont même dimension, donc l'espace propre associé à la valeur propre μ est aussi une droite. ♦
b) A et A^{-1} étant semblables, λ a mêmes multiplicités dans les polynômes caractéristiques de A et A^{-1}. Cependant, on a
$$\chi_{A^{-1}}(X) = \det(A^{-1} - XI) = X^n \det(A^{-1}) \det(\frac{1}{X}I - A) = (-X)^n \det A \chi_A(\frac{1}{X})$$
ce qui prouve que λ et μ ont mêmes multiplicités comme racines du polynôme caractéristique de A. Toujours par similitude de A et A^{-1}, leurs sous-espaces caractéristiques (pour la même valeur propre λ) ont même dimension ; on a en fait
$$K_\lambda(A^{-1}) = \operatorname{Ker}(A^{-1} - \lambda I)^\alpha = \operatorname{Ker}(I - \lambda A)^\alpha = \operatorname{Ker}(A - \frac{1}{\lambda}I)^\alpha = K_\mu(A)$$
ce qui nous assure que $K_\mu(A)$ et $K_\lambda(A)$ ont même dimension. Cependant, leur somme est directe et donne $\mathbb{C}^n$ par hypothèse (A ayant seulement deux valeurs propres). Finalement, n doit être pair. ♦
c) Sur $K_\lambda(A)$ l'endomorphisme associé à A agit comme $\lambda I + N$, N étant nilpotent d'indice $\frac{n}{2}$ (puisque l'espace propre de A associé à la valeur propre λ, noyau de N, doit être de dimension 1). On peut donc trouver une base de ce sous-espace rendant la matrice de A de la forme $(\lambda - 1)I_k + J_{k,1}$, avec $k = \frac{n}{2}$. Le même phénomène va se produire sur $K_\mu(A)$. ♦
d) Notons A_λ (resp. A_μ) l'endomorphisme induit sur $K_\lambda(A)$ (resp. $K_\mu(A)$). Considérons A_μ^{-1} : sa seule valeur propre est $\mu^{-1} = \lambda$, et son espace propre associé est de dimension 1 (même argument qu'en II2°). On peut lui appliquer la même réduction qu'à A_λ, et il apparaît que A_μ est semblable (ou conjugué) à A_λ^{-1}. En prenant une base appropriée pour $K_\mu(A)$, on peut trouver une matrice semblable à A de la forme $\begin{pmatrix}M&0\\0&M^{-1}\end{pmatrix}$, M étant un bloc de Jordan comme à la

question précédente (des λ sur la diagonale, des 1 juste au-dessus et 0 ailleurs). Cette matrice peut se factoriser aisément : $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & M^{-1} \\ M & 0 \end{pmatrix}$ et on vérifie - toujours par produit par blocs - que les deux matrices figurant dans le produit à droite sont de carré I. Ainsi, A est bien semblable à un produit de réflexions, donc (lemme antérieur) est un produit de réflexions.

Conclusion. Il semble que toute matrice semblable à son inverse soit produit de réflexions, et inversement ; mais on ne l'a prouvé que dans des cas particuliers.